DE

SIPHONE,

DISSERTATIO PHYSICA,

QUAM,

CONSENTIENTE AMPL. ORD. PHILOS. ABOENS.,

AUCTOR

Mag. GUST. GABR. HALLSTRÖM,

PHYSICES DOCENS, NEC NON AMANUENSIS

AD REG. ACAD BIBLIOTH.,

ET

RESPONDENS

ESAIAS WEGELIUS,

OSTROBOTNIENSES,

IN AUDITORIO MAJORI DIE XIV MAJI 1800,

HORIS A. M. SOLITIS,

PUBLICE EXAMINANDAM MODESTE OFFERUNT.

ABOÆ,

IN OFFICINA FRENCKELLIANA.

H.

IN S:AM R:AM M:TEM

SUMMÆ FIDEI VIRO,

EX REGNI SVIOGOTHICI PROCERIBUS UNO,

SUPREMO AD AULAM REGINÆ VIDUÆ MARESCHALLO,

REGIÆ EDUCATIONIS ANTEHAC GUBERNATORI VICARIO,

ACADEMIÆ ABOËNSIS CANCELLARIO,

ORDINUM REGIORUM EQUITI ET COMMENDATORI,

ILLUSTRISSIMO ATQUE EXCELLENTISSIMO COMITI,

DOMINO

CAROLO ADAMO WACHTMEISTER,

MÆCENATI SUMMO,

SACRUM.

§. I.

Sipho vocatur tubus incurvatus, per quem liquidum, supra superficiem suam in vase, in quo continetur, a pressione aëris atmosphærici elevatum, ex vase hoc in aliud effluit. Inventionem instrumenti hujus simplicis difficilem non fuisse conjicere possumus, quare etiam mirum non erit, usum ejus antiquiorum temporum homines jam novisse. Sic v. gr. ab HERONE *Alexandrino* ejus mentionem jam fuisse factam scimus. Æque autem facilem non fuisse explicatu veram caussam effluxus liquidi per Siphones, is intelligit, qui statum Physices ante medium Sæculi XVII cognoscit. Fugæ vacui hoc phænomenon ante tempora TORRICELLI tributum fuisse comperimus. Detecta autem gravitate aëris atmosphærici, non diu dubitarunt Physici, quin inde derivanda esset genuina caussa effectus Siphonum, & quidem mox indubiis demonstrarunt experimentis, a sola pressione aëris liquidum in Siphone elevari, atque dein ex ea effluere. Scilicet in vacuo liquidum per Siphones non effluere experti sunt hujus rei scrutatores. Hac autem re cognita, exponi jam potest theoria Siphonum, circa quam nobiscum quædam meditati sumus, quæ æquæ Lectoris benevoli censuræ his pagellis publice committimus.

§. II.

Sit *FGH* (Fig. 1) vas quoddam, ad *FH* plenum liquido, cui immersa erit pars extrema *AB* Siphonis

BAKDC. Impleto Siphone liquido, aër superficiem hujus *FBAH* gravitate sua premit, eaque vis etiam particulas liquidi in *BA* sursum versus *KO* pellit. Huic autem opposita est pressio, oriunda a gravitate fluidi *KOAB*, liquidum in *BA* deorsum urgente. Premitur itaque liquidum in Siphonis transversa sectione suprema *KO* versus *DC* gravitate aëris atmosphærici, diminuta vi a gravitate liquidi in *KOAB* derivanda, ita ut si sit altitudo Mercuris in Barometro prope $AB = a$, & gravitates specificæ Mercurii hujus atque liquidi, quo plenus est Sipho, ut $m : n$, erit altitudo liquidi, cujus gravitati est æqualis vis, qua urgentur particulæ in *KO* versus *DC*, $= \frac{ma}{n} - KR$, ducta recta *OR* ex parte suprema Siphonis verticali ad *FH* productam. Sit similiter altitudo Barometri in *DC* $= a'$, & erit aëris atmosphærici pressio in *DC* versus *KO* æqualis pressioni liquidi altitudinis $\frac{ma'}{n}$. Est itaque pressio in particulas liquidi in *KO* versus *BA* æqualis pressioni liquidi, cujus altitudo est $\frac{ma'}{n} - KR - EC$, ducta *CE* ex *C* verticali ad *FH* productam. Differentia autem altitudinum harum inventarum

$$\frac{ma}{n} - KR - \frac{ma'}{n} + KR + EC = EC - \frac{m}{n}(a' - a)$$

est altitudo liquidi, cujus pressioni æqualis est effectus aëris atmosphærici, urgentis particulas *KO* versus *DC*. Cumque aër, quamdiu est $OR < \frac{ma}{n}$, gravitate sua elevet ex *AB* ad *KO* liquidum, quod ibi versus *DC* pellitur, per *DC* necessario id effluet.

§. III.

§. III.

Videtur ex allatis, ut effluat liquidum per Siphonem, esse debere totum orificium Siphonis liquido in vase semper immersum, ne aër sed sufficiens copia liquidi in Siphonem ibi intret. Deinde requiritur, ut sit $OR < \frac{ma}{n}$; si enim est $OR = \frac{ma}{n}$, ad O quidem a premente aëre elevatur liquidum, unde tamen versus DC fluere nequit. Sumta vero $OR > \frac{ma}{n}$, ne ad O quidem illud elevatur, minus versus DC fluit. Quamprimum vero fit $OR < \frac{ma}{n}$, supra O elevatur liquidum, & versus DC necessario fluet. Ulterius erit quoque in Siphone, per quem liquidum fluet, quantitas $EC - \frac{m}{n}(a' - a)$ positiva, non $= 0$. Id autem accidit sumta EC positiva non $= 0$, quando nimirum est orificium Siphonis DC infra superficiem liquidi FAE situm; quod quidem sic demonstrabimus. Inter regulas ope Barometri altitudines mensurandi, quas varias varii exhibuerunt Physici, formula D:ni TREMBLEY, quæ medium inter plures tenet, ceteris forte erit præferenda; præsenti saltem nostro usui satis est accurata. Est autem hæc:

$$EC = 10000\left(1 + \frac{r - 11.5}{192}\right)(\text{Log. vulg. } a' - \text{Log. vulg. } a)\ ^{*)},$$

 ope

*) Vide: *Analyse de quelques experiences faites pour la determination des hauteurs par le moyen du Barometre*, par JEAN TREMBLEY, in *Voyages dans les Alpes*, par H. B. DE SAUSSURE. *Genev. 1786. 4. Tom. II. p. 616.*

ope cujus invenitur altitudo EC in orgyiis parisinis, numeratis altitudinibus Barometri a' & a in lineis parisinis, atque correctis iisdem secundum normalem temperaturam 11,5 graduum Thermometri Reaumuriani, nec non designante r gradus caloris medii inter calores eodem Thermometro in C & E observatos. Cum jam sit

$$\text{Log.hyp.}\,a' = 2\left(\frac{a'-1}{a'+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a'-1}{a'+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{a'-1}{a'+1}\right)^5 + \&c.\right), \text{ atque}$$

$$\text{Log.hyp.}\,a = 2\left(\frac{a-1}{a+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \&c.\right)\text{ *}),$$

hæque series convergant, quoniam a' & a numeri sunt positivi; in finem præsentem sufficit assumere: Log. hyp. $a' = \frac{2(a'-1)}{a'+1}$, & Log. hyp. $a = \frac{2(a-1)}{a+1}$, adeoque Log. vulg. $a' = 2.2{,}3025.\frac{a'-1}{a'+1}$, & Log. vulg. $a = 2.2{,}3025.\frac{a-1}{a+1}$

unde erit Log. vulg. a' — Log. vulg. $a = 4.2{,}3025.\frac{a'-a}{(a'+1)(a+1)}$

Hoc valore in formula superiori substituto, prodit $EC = \frac{7675\,(180{,}5+r)\,(a'-a)}{16\,(a'+1)\,(a+1)}$ org. parisin. Cum in hocce valore sint a' & a lineæ paris., in expressione $EC - \frac{m}{n}(a'-a)$ in lineis quoque exprimi debent a' & a; quare etiam valor altitudinis EC in lineis est exprimendus, ut sit $EC = \frac{54.7675\,(180{,}5+r)\,(a'-a)}{(a'+1)\,(a+1)}$ lin. paris. Invenitur itaque EC —

*) Vide: *Introd. in Analysin Infinitor. Auctore* LEON. EULERO, *Lausannæ* 1748, *Tom. I. pag.* 89.

$$-\frac{m}{n}(a'-a) = \left(\frac{54.7675(180,5+r)}{(a'+1)(a+1)} - \frac{m}{n}\right)(a'-a) =$$

$$\frac{54.7675(180,5+r)(a'-a)}{(a'+1)(a+1)}\left(1 - \frac{(a'+1)(a+1)m}{54.7675(180,5+r)n}\right)$$

lin. parisin., in qua formula esse semper

$1 - \frac{(a'+1)(a+1)}{54.7675(180,5+r)n}$ quantitatem positivam, ostendendum est. Manentibus altitudinibus Barometricis invariatis, eo major evadit quantitas $\frac{(a'+1)(a+1)m}{54.7675(180,5+r)n}$ quo major sumitur ratio $\frac{m}{n}$, & minor quantitas r. Ex collatis autem gravissimis & levissimis liquidis, hucusque cognitis, scimus $\frac{m}{n}$ esse minorem numero 18,6 *), atque esse in nostris regionibus valorem minimum quantitatis $r = -32$; quibus substitutis prodit

$$1 - \frac{(a'+1)(a+1)m}{54.7675(180,5+r)n} = 1 - \frac{18,6(a'+1)(a+1)}{54.7675 \cdot 148,5}$$

$= 1 - 0,0000003\,(a'+1)(a+1)$. Cumque sit productum $(a'+1)(a+1)$ maximum sumtis factoribus $a'+1$ & $a+1$ aequalibus; pro casu, quo erit quanti-

 tas

*) Mercurii, liquidorum gravissimi, gravitas specifica est 13,5681, levissimi autem, Ætheris Muriatici, 0,7296 (Cfr. *Inledning til Natur-Läran*, af L. Regnér, *Upf.* 1785, 1 *Del.* p. 260, 264.) Facta ergo $m = 13{,}5681$, & $n = 0{,}7296$, reperitur maximus valor rationis $\frac{m}{n} = 18{,}597$.

tas $1 - 0,0000003\,(a' + 1)\,(a + 1)$ positiva, debet esse $1 > 0,0000003\,(a + 1)^2$, seu $(a + 1)^2 < 3333333,33$, $a + 1 < 1825,7$, & $a < 1824,7$ lin. parisin., vel $a < 152,05$ pollic. parisin. Cum autem in Barometris nostris altitudo Mercurii semper est minor 152 pollic. parisin., nisi plus uno milliari Svecano *) infra libellam maris descendimus; patet quoque in nostris regionibus esse semper $1 - \frac{(a'+1)(a+1)\,m}{54.7675\,(180,5 + r)\,n}$ positivam, adeoque per nostros Siphones effluere liquidum, quando orificium *DC* infra libellam liquidi *BAE* est situm.

Sumta autem $EC = 0$, fit quoque $a' - a = 0$, & $EC - \frac{m}{n}(a' - a) = 0$; quare evanescente vi ad effluendum urgente, liquidum in Siphone quiescet. — Facta tandem *EC* negativa, ita ut orificium Siphonis *DC* supra superficiem liquidi *FHE* situm sit, evadit vis urgens particulas liquidi in *KO* versus *DC* proportionalis quantitati $-EC + \frac{m}{n}(a - a')$, quam ex præcedentibus semper esse patet negativam, atque adeo indicare, liquidum in *KO* tum versus *AB* pelli.

Sic quidem nulla habita ratione figuræ Siphonis demonstravimus, liquidum ope pressionis aëris atmosphærici, certis observatis conditionibus, per eum effluere posse. Sed hinc tamen non est concludendum, a figura Sipho-

*) Hoc assertum nititur calculo secundum legem condensationis aëris D:ni Mariottæ instituto.

Siphonis fluxum liquidi nullo modo pendere. Talem primo præsupponit demonstratio præcedens figuram Siphonis, ut liquidum ex pleno ejus orificio DC effluat, atque sic aëris ingressionem in Siphonem impediat. Deinde celeritas liquidi effluentis necessario vel augebitur vel minuetur mutata figura Siphonis, atque imminuto hinc vel aucto affrictu liquidi in ejus latera. Quomodo itaque celeritas hæcce ex figura Siphonis pendeat, exponere jam conabimur. Semper autem talem tantum consideremus Siphonem, cujus curvatura quoad longitudinem duabus Coordinatis exprimi potest.

§. IV.

Immersum sit orificium superius AB Siphonis $ABCD$ (Fig. 1.) liquido, cujus superficies FH eandem altitudinem in vase FGH semper servet. Ducta linea recta AP verticali ad FH, & ex puncto quovis Siphonis M recta MP normali ad AP, sit $AP = x$, $MP = y$, & $AOM = s$. Sit quoque MN sectio Siphonis transversa, longitudini hujus in M normalis, cujus area assumatur $= z^2$, quæ erit vel constans vel functio quædam Coordinatarum x & y. Sit deinde mn sectio alia transversa proxima ipsi MN, ut ductis rectis mp parallela ipsi MP, & Mq ipsi AP, sit $Pp = Mq = dx$, $qm = dy$, & $Mm = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Assumatur liquidi ex CD effluentis velocitas constans *) & æqualis celeritati, quam acquirit corpus grave libere cadendo ex altitudine $= b$, atque erit, sumta vi gravitatis seu celeritate, quam corpus grave tempore unius minuti secundi libere cadendo acquirit, $= 1$,

*) Si quidem primo momento effluxus liquidi ex orificio Siphonis celeritas hujus accelerata est, mox tamen illam constantem evadere docent experimenta.

$= 1$, velocitas liquidi in $CD = \sqrt{b}$. Effluente, dato tempore, ex orificio CD certa quantitate liquidi, eidem æqualis quantitas fluere debet eodem tempore per sectionem MN; quare velocitates in CD & MN erunt inverse ut amplitudines Siphonis in CD & MN. Facta ergo amplitudine in $CD = b^2$, habetur $z^2 : b^2 : : \sqrt{b}$; veloc. liquidi in MN, quæ ergo est $= \frac{b^2\sqrt{b}}{z^2}$. Hac jam celeritate percurritur spatiolum ds tempusculo dt (designante t tempus); quare erit $dt = \frac{z^2 ds}{b^2\sqrt{b}}$. Motus liquidi in directione Mm considerari potest uti effectus duarum virium, unius secundum directionem AP agentis, & alterius secundum PM, quarum illa est $= \frac{ddx}{dt^2}$, hæc autem $= \frac{ddy}{dt^2}$, sumta nimirum dt constante *). Adhibito autem valore invento tempusculi dt, est $\frac{dx}{dt} = b^2\sqrt{b}.\ \frac{dx}{z^2 ds}$, unde differentiando obtinetur pro dt constante: $\frac{ddx}{dt} = b^2\sqrt{b}.\ \left(\frac{ddx}{z^2 ds} - \frac{2dzdx}{z^3 ds} - \frac{dxdds}{z^2 ds^2}\right)$, & vis urgens secundum AP: $\frac{ddx}{dt^2} = b^4 b\left(\frac{ddx}{z^4 ds^2} - \frac{2dzdx}{z^5 ds^2} - \frac{dxdds}{z^4 ds^3}\right)$. Est ulterius

*) Cfr. *Theoriam motus corporum solidorum seu rigidorum*, Auctore LEONH. EULERO, *Edit. nov, Gryphiswald. 1790, Cap. V, Probl. 13*, §. 205.

terius $\frac{dy}{dt} = b^2 \sqrt{b} . \frac{dy}{z^2 ds}$, unde differentiando eruitur:
$\frac{ddy}{dt} = b^2 \sqrt{b} . \left(\frac{ddy}{z^2 ds} - \frac{2dzdy}{z^3 ds} - \frac{dydds}{z^2 ds^2} \right)$, atque hinc habetur vis secundum PM: $\frac{ddy}{dt^2} = b^2 b \left(\frac{ddy}{z^4 ds^2} - \frac{2dzdy}{z^5 ds^2} - \frac{dydds}{z^4 ds^3} \right)$
In recta MP fiat $MQ = \frac{ddy}{dt^2}$, & ducta ex Q recta QS parallela lineæ AP, sumatur $QS = \frac{ddx}{dt^2}$, atque designent QM, QS vires, quibus liquidum in MN secundum directiones PM & AP urgetur. Harum utraque in duas resolvi possunt vires, quarum una parallele & altera normaliter ipsi MN agunt. Ductis scilicet ex Q recta QVU parallela lineæ Mm, & ex M recta MV perpendiculari eidem Mm, ut etiam ex S recta SU parallela lineæ VM; erit $QU + QV$ vis urgens liquidum secundum directionem Mm, qua illud in MN movetur. Vis autem $VM - SU$ agit perpendiculariter in latus Siphonis, cujus reactio illam omnino destruit. Ob similitudinem Triangulorum mqM, QVM & SUQ est ulterius $ds : dx :: QS : QU$, & $QU = \frac{QS . dx}{ds} = \frac{dxddx}{dsdt^2}$, atque $ds : dy :: QM : QV$, unde $QV = \frac{QM . dy}{ds} = \frac{dyddy}{dsdt^2}$. Hinc ergo erit vis $QU + QV = \frac{ddx}{dt^2} . \frac{dx}{ds} + \frac{ddy}{dt^2} . \frac{dy}{ds}$, quæ substitutis valoribus virium $\frac{ddx}{dt^2}$ & $\frac{ddy}{dt^2}$, abit in hanc: $QU + QV =$

$$b^4 b \left(\frac{dxddx + dyddy}{z^4 ds^3} - \frac{2dz(dx^2 + dy^2)}{z^5 ds^3} - \frac{dds(dx^2 + dy^2)}{z^4 ds^4}\right)$$

Quum autem ſit $dx^2 + dy^2 = ds^2$, & differentiando $\frac{dxddx + dyddy}{ds} = dds$; erit, his valoribus ſubſtitutis, vis urgens liquidum ſecundum directionem Mm ſeu $QU + QV = -\frac{2b^4 bdz}{z^5 ds}$. Hæc in $z^2 ds$ ducta dat vim $= -\frac{2b^4 bdz}{z^3}$, qua columna liquidi $MmnN$ ſecundum directionem Mm ſollicitatur.

§. V.

Sic ex conſideratione motus liquidi analytica eruimus expreſſionem vis, cui æquari debent vires a cauſſis phyſicis oriundæ, quas jam determinabimus. Aſſumta vi gravitatis ſecundum directionem verticalem $= 1$, erit hæc ad effectum ſuum in liquidum ſecundum Mm, ut $Mm : Mq$ ſeu $ds : dx$. Fit itaque vis ſecundum Mm ſollicitans $= \frac{dx}{ds}$, quæ in $z^2 ds$ ducta dat vim $= z^2 dx$ ex gravitate liquidi pendentem, eaque urget liquidum $MmnN$ ſecundum directionem Mm.

Deinde premitur columna liquidi $MNnm$ a liquido ſuperimminente $AMNB$, nec non a ſubjacente $mnCD$. Aſſumta itaque preſſione in MN tali, qualis efficitur gravitate columnæ liquidi, cujus altitudo ſit $= p$, erit altitudo, cui proportionalis eſt preſſio in mn, $= p + dp$; cumque reactio liquidi ſubjacentis huic preſſioni æqualis eſſe de-

debeat, erit differentia $p - (p + dp) = - dp$ altitudo illa, cui proportionalis est pressio cujusque particulæ liquidi in *MN* versus *CD*. Tota itaque sectio *MN*, adeoque etiam columna liquidi *MmnN*, premitur secundum directionem *Mm* vi $= - z\,dp$.

Fluente ulterius liquido in Siphone, celeritas ejus a frictione in latera Siphonis minui debet. Incedente autem corpore rigido super superficie aspera, frictionem, quam in motu suo patitur, proportionalem esse pressioni, qua ad superficiem apprimitur, notum est *). Cumque minimæ liquidorum particulæ pro solidis sint habendæ **), patere videtur, frictionem illorum super basi solida constantem quoque sequi rationem vis, qua ad basin apprimuntur. Talem quidem illam hic assumamus. Vi illa, qua columna liquidi *MNnm* a circumjacente liquido in *AMNB* & *DmnC* premitur, premit quoque hæc latera Siphonis intra plana *MN* & *mn*. Hæc autem vis in præcedentibus proportionalis est assumta altitudini p. Sit itaque z ad perimetrum Siphonis in *MN* ut $1 : e$, ita ut hic perimeter sit $= ez$, & assumta vi premente p ad frictionem in ratione $1 : f$, ut sit frictio $= fp$; erit frictionis effectus ad retardandum motum columnæ liquidi $MmnN = efpzds$; cumque directio frictionis sit semper

 con-

*) Vide: *Theorie des Machines simples, en ayant egard au Frottement de leurs parties, &c. par* Coulomb, in *Mem. de Mathem. & Phys. présentés a l'Academie Roy. des Sc. a Paris, Tome X*; & Euleri *Theoria motus corpor. solid. Gryph. 1790, Supplem. p. 510, §. 1105.*

**) "Auch muss man sich diese ersten Theile (flüssiger Körper), wenn man sich einmal dergleichen vorstellen will, als *feste* oder *harte Körper* gedenken, weil bey ihnen der begrif von *Flüssigkeit*, der eine fernere Theilbarkeit voraussetzt, nicht mehr statt findet." Vide: *Physikalisches Wörterbuch*, von J. S. T. Gehler, Leipzig 1798, 1 Th. 607, 608 S.

contraria motus directioni, erit vis frictionis ad pellendum liquidum secundum directionem $Mm = -cfpzds$.

§. VI.

Vires has liquidum in Siphone moventes physicæ, quas jam determinavimus, vi per considerationem motus analyticam inventæ necessario æquari debent, unde sequens provenit æquatio: $-\frac{2b^4bdz}{z^3} = z^2dx - z^2dp - cfpzds$, seu terminis per z^2 divisis atque commodius ad integrandum dispositis: I.) $dp + \frac{cfpds}{z} = dx + \frac{2b^4bdz}{z^5}$. Ut vero hæc integretur, ducantur omnes ejus termini in $N^{cf\int ds:z}$ (denotante N numerum, cujus Logarithmus Hyperbolicus $= 1$), quo habeatur: $N^{cf\int ds:z}dp + \frac{cfN^{cf\int ds:z}pds}{z} = N^{cf\int ds:z}dx + 2b^4b.\frac{N^{cf\int ds:z}dz}{z^5}$, unde integrando obtinetur: II.) $N^{cf\int ds:z}p = A + \int N^{cf\int ds:z}dx + 2b^4b\int\frac{N^{cf\int ds:z}dz}{z^5}$.

Quum sint s & z functiones Coordinatarum x & y, data inter has æquatione, ex curvatura cujusque Siphonis derivata, inveniri possunt Integralia $\int ds:z$, $\int N^{cf\int ds:z}dx$, & $\int\frac{N^{cf\int ds:z}dz}{z^5}$, quando etiam facile determinatur va-

lor

lor quantitatis conſtantis A, Integralium corrigendorum cauſſa additæ. Ut autem eliminetur variabilis p, dividatur primo æqu. II. per $N^{cffds:z}$, quo habeatur: III.) $p = N^{-cffds:z}(A + \int N^{cffds:z}dx + 2b^n b \int \frac{N^{cffds:z}dz}{z^5})$.

Sit deinde $EC = k$, atque fiat in æqu. III ubique $x = k$, $z = b$, & $s = AOD$, nec non, quum a gravitate aëris atmoſphærici prematur liquidum in DC, $p = \frac{ma'}{n}$ (§. II.). Hoc facto ex æqu. III. prodit æquatio inter incognitas f & b. Sumta vero in hac $k = 0$, adeoque $a' = a$, fit $b = 0$ (§. III.); atque ſic habetur æquatio, quæ determinat frictionem f. Hac vero cognita, innoteſcit quoque ope æquationis inter f & b, altitudo b, velocitatem liquidi ex Siphone effluentis determinans.

Exemplis hæc omnia illuſtrare non permittit anguſtia harum pagellarum.

Fig. 1